**Квадратичная функция и ее график**

**Функция вида y=ax^2+bx+c, где a<>0 называется квадратичной функцией.**

В уравнении квадратичной функции:

**a** - **старший коэффициент**

**b** - **второй коэффициент**

**с**  - **свободный член.**

График функции *y = x2*называется *параболой*

***Свойства функции у = х2***

1.  Если *х* = 0, то *у =* 0, т.е. парабола имеет с осями координат общую точку (0; 0) - начало координат

2.  Если *х ≠* 0*,* то *у* > 0, т.е. все точки параболы, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс

3.   Множеством  значений  функции *у* = *х2* является промежуток [0; + ∞)

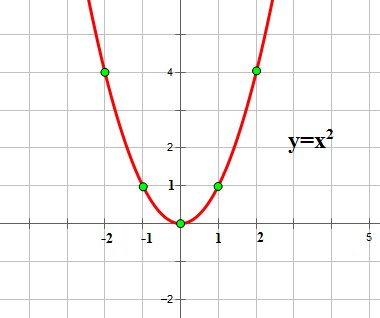
4. Противоположным значениям х соответствует одно и тоже значение у, т.е. если значения аргумента отличают­ся только знаком, то значения функции равны,  график симметричен относительно оси ординат (функция *у* = *х2 -* четная).

5.  На промежутке [0; + ∞) функция *у* = *х2* возрастает

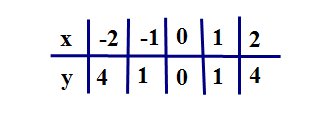
6.  На промежутке (-∞; 0] функция *у* = *х2* убывает

7.  Наименьшее значение функция принимает в точке *х* = 0, оно равно 0. Наибольшего значения не существует

**Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола**, которая для функции y=x^2 имеет вид:

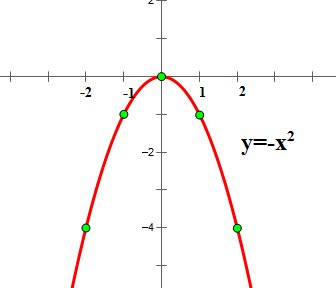
[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr34.jpg)

Обратите внимание на точки, обозначенные зелеными кружками - это, так называемые "базовые точки". Чтобы найти координаты этих точек для функции y=x^2, составим таблицу:

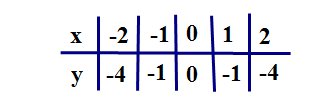
[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr210.jpg)

**Внимание!** Если в уравнении квадратичной функции старший коэффициент a=1, то график квадратичной функции имеет ровно такую же форму, как график функции y=x^2 при любых значениях остальных коэффициентов. От значения коэффициентов зависит положение вершины параболы.

График  функции y=-x^2 имеет вид:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr114.jpg)

Для нахождения координат базовых точек составим таблицу:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr35.jpg)

Обратите внимание, что график функции y=-x^2 симметричен графику функции y=x^2относительно оси ОХ.

Итак, мы заметили:

**Если старший коэффициент a>0, то ветви параболы напрaвлены вверх.**

**Если старший коэффициент a<0, то ветви параболы напрaвлены вниз.**

Второй параметр для построения графика  функции - значения х, в которых функция равна нулю, или **нули функции**. На графике нули функции f(x) - это точки пересечения графика функции y=f(x)с осью ОХ.

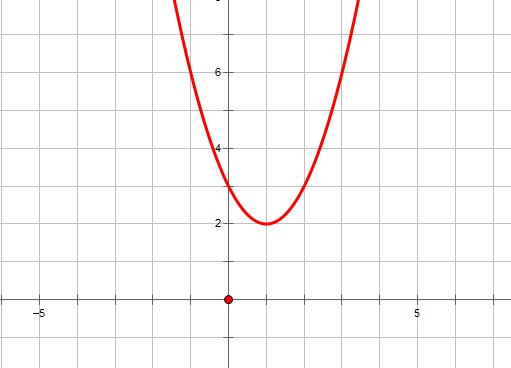
Поскольку ордината (у) любой точки, лежащей на оси ОХ равна нулю, **чтобы найти координаты  точек  пересечения графика функции y=f(x)с осью ОХ, нужно решить уравнение f(x)=0.**

В случае квадратичной функции y=ax^2+bx+c нужно [решить квадратное уравнение](https://ege-ok.ru/2012/04/01/reshenie-kvadratnyih-uravneniy/) https://ege-ok.ru/wp-content/plugins/wpmathpub/phpmathpublisher/img/math_993_00ba2f8841f4bdc479af1d446e2c7ef8.png.

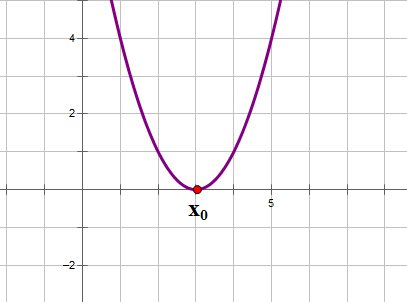
В процессе решения квадратного уравнения мы находим дискриминант: D=b^2-4ac, который определяет число корней квадратного уравнения.

И здесь **возможны три случая:**

**1**. Если D<0,то уравнение ax^2+bx+c=0 не имеет решений, и, следовательно, квадратичная парабола y=ax^2+bx+c не имеет точек пересечения с осью ОХ. Если a>0,то график функции выглядит как-то так:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr43.jpg)

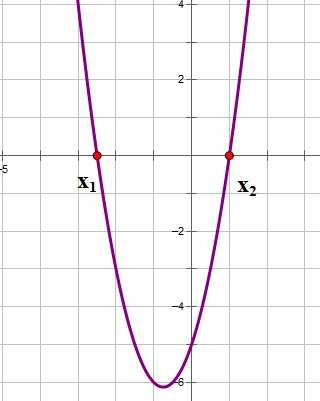
**2**. Если D=0,то уравнение ax^2+bx+c=0 имеет одно решение, и, следовательно, квадратичная парабола y=ax^2+bx+c  имеет одну точку пересечения с осью ОХ. Если a>0,то график функции выглядит примерно так:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr131.jpg)

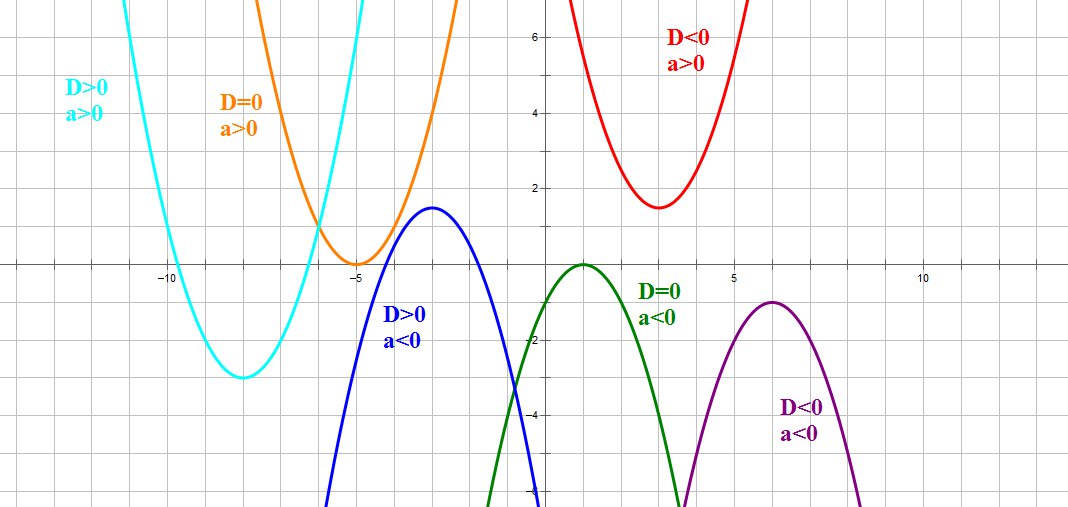
**3**.  Если D>0,то уравнение ax^2+bx+c=0 имеет два решения, и, следовательно, квадратичная парабола y=ax^2+bx+c  имеет две точки пересечения с осью ОХ:

x_1={-b+sqrt{D}}/{2a},  x_2={-b-sqrt{D}}/{2a}

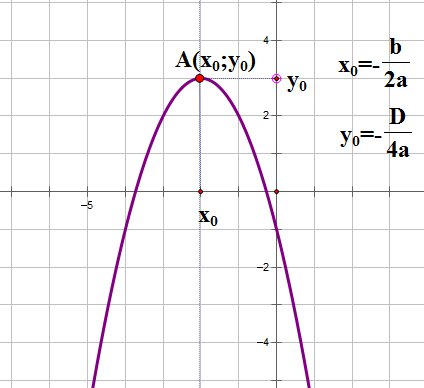
Если a>0,то график функции выглядит примерно так:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr62.jpg)

Следовательно, **зная направление ветвей параболы и знак дискриминанта, мы уже можем в общих чертах определить, как выглядит график нашей функции.**

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr121.jpg)

Следующий важный параметр графика квадратичной функции - **координаты вершины параболы:**

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr102.jpg)

x_0=-{b/{2a}}

y_0=-{D/{4a}}=y(x_0)

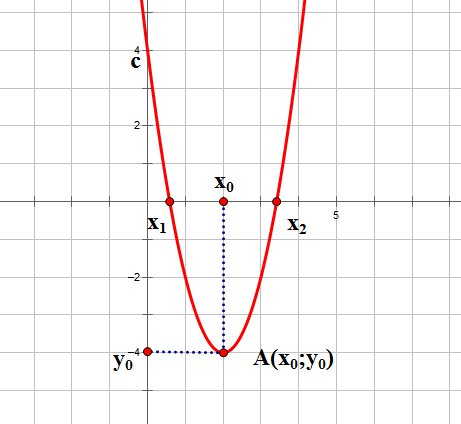
Прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси OY является осью симметрии параболы.

И еще один параметр, полезный при построении графика функции - **точка пересечения параболы y=ax^2+bx+c с осью OY.**

Поскольку абсцисса любой точки, лежащей на оси OY равна нулю, чтобы найти точку пересечения параболы y=ax^2+bx+c с осью OY, нужно в уравнение параболы вместо х подставить ноль: y(0)=c.

**То есть точка пересечения параболы с осью OY имеет координаты (0;c).**

Итак, основные параметры графика квадратичной функции показаны  на рисунке:

[](https://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/05/fr77.jpg)

**Алгоритм построения графика квадратичной функции**

**у = ах2 + вх + с**

1. Построить систему координат, отметить единичный отрезок и подписать координатные оси.

2. Определить направление ветвей параболы (вверх или вниз).  
Для этого надо посмотреть на знак коэффициента a. Если плюс - то ветви направлены вверх, если минус - то ветви направлены вниз.

3. Определить координату х вершины параболы.  
Для этого нужно использовать формулу Хвершины = -b/2\*a.

4. Определить координату у вершины параболы.  
Для этого подставить в уравнение Увершины = a\*(x^2)+b\*x+c вместо х, найденное в предыдущем шаге значение Хвершины.

5. Нанести полученную точку на график и провести через неё ось симметрии, параллельно координатной оси Оу.

6. Найти точки пересечения графика с осью Ох.  
Для этого требуется решить квадратное уравнение a\*(x^2)+b\*x+c = 0 одним из известных способов. Если в уравнение не имеет вещественных корней, то график функции не пересекает ось Ох.

7. Найти координаты точки пересечения графика с осью Оу.  
Для этого подставляем в уравнение значение х=0 и вычисляем значение у. Отмечаем эту и симметричную ей точку на графике.

8. Находим координаты произвольной точки А(х,у)   
Для этого выбираем произвольное значение координаты х, и подставляем его в наше уравнение. Получаем значение у в этой точке. Нанести точку на график. А также отметить на графике точку, симметричную точке А(х,у).

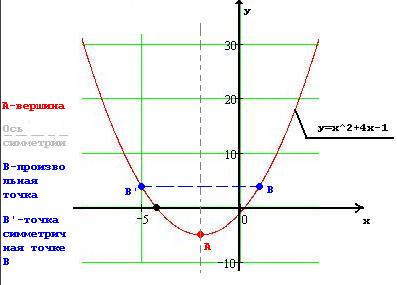
9. Соединить полученные точки на графике плавной линией и продолжить график за крайние точки, до конца координатной оси. Подписать график либо на выноске, либо, если позволяет место, вдоль самого графика.

**Пример построения графика**

В качестве примера, построим график квадратичной функции заданной уравнением

у = х2 + 4х - 1   
1. Рисуем координатные оси, подписываем их и отмечаем единичный отрезок.  
2. Значения коэффициентов а=1, b=4, c= -1. Так как а=1, что больше нуля, ветви параболы направлены вверх.  
3. Определяем координату Х вершины параболы: Х = -b/2a = -4/2ˑ1 = -2.  
4. Определяем координату У вершины параболы   
Увершины = a\*(x^2)+b\*x+c = 1\*((-2)^2) + 4\*(-2) – 1 = -5.  
5. Отмечаем вершину и проводим ось симметрии.  
6. Находим точки пересечения графика квадратичной функции с осью Ох. Решаем квадратное уравнение x^2+4\*x-1=0.  
х1=-2-√3 х2 = -2+√3. Отмечаем полученные значения на графике.   
7. Находим точки пересечения графика с осью Оу.   
х=0; у=-1  
8. Выбираем произвольную точку B. Пусть она имеет координату х=1.   
Тогда у=(1)^2 + 4\*(1)-1= 4.   
9. Соединяем полученные точки и подписываем график.

В результате получится такой график.



**Алгоритм №2:Алгоритм построения графика квадратичной функции.**

1. Графиком квадратичной функции является парабола.
2. По знаку коэффициента *a* определить направление ветвей параболы.
3. Найти нули квадратичной функции, решив квадратное уравнение , и построить их в системе координат.
4. Найти координаты вершины параболы по формулам и построить вершину.
5. Построить ось симметрии параболы
6. Взять дополнительные значения аргумента, так, чтобы они были симметричные относительно оси симметрии параболы. Вычислить значение этих точек и построить их в системе координат.
7. Соединить построенные точки плавной кривой.
8. Получается кривая, которая называется параболой, и является графиком квадратичной функции.

**Алгоритм №3:Построение графика квадратичной функции.**

*Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида y=ax²+bx+c,*

*где х - независимая переменная, a, b и с -некоторые числа (причём а≠0).*

**Чтобы построить график функции надо:**

1. Описать ,что является графиком функции (парабола)
2. куда направлены ветви параболы. (вверх(если ***а***>0) или вниз (если ***а***<0)).
3. Найти координаты вершины параболы ***А(хₒ;уₒ)*** по формуле:

 ;

***у = у(хₒ)*** т.е. подставить найденное значение абсциссы в формулу, которой задана функция и вычислить значение.

1. Прямая *x=х ₒ* является осью симметрии параболы.
2. Найти А)точки пересечения графика с осью абсцисс( нули функции), решив уравнение

**ах² + bх + с = 0** ( если они есть)

Б) точку пересечения с осью ординат (0;у(0)) и симметричную ей.

1. Если нулей функции нет или вершина лежит на оси ОУ , то заполнить таблицу значений функции:

в таблице взять соседние симметричные относительно хₒ (вершины) значения х.

Например, следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | хₒ-2 | хₒ-1 | хₒ | хₒ+1 | хₒ+2 |
| у |  |  | уₒ |  |  |

- посчитать значение функции в выбранных значениях х.

**Алгоритм определения знаков коэффициентов квадратичной функции, когда дан ее график:**

1. Направление «ветвей» параболы отвечает за определение коэффициента *а* квадратичной функции: если «ветви» параболы направлены вверх, то коэффициент *а* , если вниз то *а*.
2. Ордината точки пересечения параболы с осью ОУ отвечает за знак коэффициента *с*: если парабола пересекает ось ординат выше оси абсцисс, то *с* , если ниже – то *с*
3. За определение знака коэффициента *в* квадратичной функции отвечает знак вершины параболы: если вершина параболы х0 и ветви параболы направлены вверх (*а* , то в. ( если абсцисса вершины параболы **П**оложительная, то знаки коэффициентов а и в **П**ротивоположные; направление ветвей параболы и знак абсциссы вершины параболы определить легко, а значит по этому правилу легко сделать вывод о знаке коэффициента *в)*
4. *Аналогично:* если вершина параболы х0 и ветви параболы направлены вверх (*а* , то в. ( если абсцисса вершины параболы **О**трицательная, то знаки коэффициентов а и в **О**динаковые; и опять же: направление ветвей параболы и знак абсциссы вершины параболы определить достаточно просто, а значит по этому правилу легко сделать вывод о знаке коэффициента *в)*